

INSTITUT D'ESTUDIS CATALANS

ARXIUS DE LA SECCIÓ DE CIÈNCIES. XXXIII

FERRAN SUNYER I BALAGUER

De la Societat Catalana de Ciències Físiques, Químiques i Matemàtiques

SOBRE UN ESPAI
DE FUNCIONS ENTERES
D'ORDRE INFINIT

PREMI ANTONI MARTÍ I FRANQUÈS, 1966

BARCELONA

1967

**SOBRE UN ESPAI
DE FUNCIONS ENTERES D'ORDRE INFINIT**

This One



PLX5-RYS-OKC7

INSTITUT D'ESTUDIS CATALANS

ARXIVS DE LA SECCIÓ DE CIÈNCIES. XXXIII

FERRAN SUNYER I BALAGUER

De la Societat Catalana de Ciències Físiques, Químiques i Matemàtiques

SOBRE UN ESPAI
DE FUNCIONS ENTERES
D'ORDRE INFINIT

PREMI ANTONI MARTÍ I FRANQUÈS, 1966

BARCELONA

1967

DIPÒSIT LEGAL. B. 7805 - 1967

És propietat de l'INSTITUT D'ESTUDIS CATALANS

A proposta d'una ponència formada pels senyors Antoni Esteve i Subirana, membre de la Secció de Ciències de l'INSTITUT, Josep Teixidor i Batlle, professor a la Facultat de Ciències de la Universitat de Barcelona, i Joan Casulleras i Regàs, professor a l'Institut Milà i Fontanals, membres tots tres de la Societat Catalana de Ciències Físiques, Químiques i Matemàtiques, l'INSTITUT D'ESTUDIS CATALANS, en sessió plenària tinguda el dia 15 d'abril de 1966, acordà per unanimitat de concedir el Premi Antoni Martí i Franquès (Martí d'Ardenya) al senyor Ferran Sunyer i Balaguer, pel seu treball *Sobre un espai de funcions enteres d'ordre infinit*.

L'autor havia dut a terme les seves investigacions sota contracte amb la U. S. Navy.

En la mateixa sessió l'INSTITUT prengué també l'acord de publicar el treball premiat.

INTRODUCCIÓ

Segons el teorema de Picard, o les seves generalitzacions, és conegut que una funció entera solament pot tenir un valor excepcional. Més encara, aquest valor excepcional, quan l'ordre de la funció és finit, solament es pot presentar en el cas que aquest ordre sigui un nombre enter. Per tant, dins el conjunt de les funcions d'ordre finit es pot afirmar ja que les funcions que presenten un valor excepcional són «escasses». A més, en un treball anterior [5] vaig demostrar que, àdhuc considerant únicament les funcions d'un determinat ordre enter finit, les funcions que presenten el valor excepcional són també relativament «escasses». Independentment, Littlewood i Offord [2] demostraren una sèrie de teoremes molt precisos dels quals es podien deduir uns resultats que queien dins el mateix ordre d'idees dels que acabem de citar.

Fins ara, però, pocs eren els resultats obtinguts en aquest sentit per a les funcions d'ordre infinit. Aquest serà l'objectiu del present treball.

En el capítol primer exposarem una sèrie de resultats auxiliars, alguns d'ells ja coneguts, i d'altres precisions de resultats donats anteriorment per altres autors o per mi mateix.

En el capítol segon demostrarem que si per a una funció entera d'ordre infinit $F(z)$ existeix una funció $f(z)$ d'ordre «inferior» tal que $F(z) - f(z)$ s'anul·la en un conjunt relativament «poc nombrós», és suficient de canviar el signe d'una successió determinada de coeficients de F a fi que la nova funció no pugui tenir aquesta propietat.

En el capítol tercer considerarem un espai format per funcions enteres d'ordre infinit i d'una creixença determinada, i definirem una topologia de manera que l'espai serà de segona categoria; i aleshores demostrarem tres resultats que, de forma imprecisa i incompleta, podem enunciar:

1) El subconjunt format per totes les funcions d'aquest espai que tenen un valor excepcional en el sentit de Borel, és un F_σ de primera categoria.

2) El subconjunt format per totes les funcions d'aquest espai que tenen almenys una direcció que no és de Borel-Valiron¹ sense valor excepcional, és també un F_σ de primera categoria.

1. Aquestes direccions són generalment conegudes per direccions de Borel, que és el nom que els donà llur descobridor Valiron. Però H. Milloux, per fer justícia al descobridor, les anomenà direccions de Borel-Valiron. Pel mateix just motiu nosaltres continuarem emprant la denominació introduïda per H. Milloux.

3) El subconjunt format per totes les funcions del mateix espai tals que per una derivada, per la funció o bé per una integral, existeix una direcció que no és de Borel-Valiron sense valor excepcional, és un F_σ de primera categoria.

Finalment, en una nota donem un resultat que no té gaire relació amb els anteriors, però que, atès que la seva demostració segueix unes línies semblants, hem cregut pertinent d'incloure'l en una nota final. El resultat pertany a la classe de resultats que afirmen que una sèrie de potències «generalment» no es pot prolongar analíticament a l'exterior del cercle de convergència. El teorema en qüestió afirma que, en un espai de segona categoria que construïm, el subconjunt format per les sèries prolongables està contingut en un F_σ de primera categoria.

És evident que topològicament un subconjunt de primera categoria d'un espai de segona categoria es pot considerar «negligible». Aquesta és la idea dels quatre resultats últimament enunciats.

En tot aquest treball $M(r, F)$ representarà com d'habitud el màxim de $|F(z)|$ en el cercle $|z| \leq r$, i escriurem

$$\log_z Z = \log \log Z.$$

A més, usarem les notacions $O(X)$ i $o(X)$ en el sentit, respectivament, que $O(X)/X$ queda afitada, i que $o(X)/X \rightarrow 0$, com habitualment.

I

1.1. — En primer lloc ens interessa de demostrar que per a qualsevol funció entera $f(z)$ d'ordre infinit existeix una funció creixent $W(r)$ que verifica les següents condicions:

- (I) $\log W(r)$ és convexa respecte a $\log r$
- (II) $W\left(r\left(1 + \left(\frac{\log r}{\log W(r)}\right)^{\varepsilon(r)}\right)\right) \leq (W(r))^{1+o(1)}$
- (III) $\varepsilon(r) > 0$ i $\varepsilon(r) \rightarrow 0$ quan $r \rightarrow \infty$
- (IV) $\left(\frac{\log r}{\log W(r)}\right)^{\varepsilon(r)} \rightarrow 0$ monòtonament quan $r \rightarrow \infty$
- (V) $\overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{\log_2 M(r, f)}{\log W(r)} = 1$.

En efecte: sigui $\{x_n\}$ la successió de nombres reals definida per les següents igualtats

$$\begin{aligned} x_1 &= 0, & x_2 &= 1, \\ x_{n+1} &= x_n(1 + (n-1)^{-2}) \end{aligned} \quad (n \geq 2)$$

Aleshores representem per $\varphi(x)$ la funció poligonal definida per la condició que entre x_{n+1} i x_n és lineal i que, a més, verifica

$$\varphi(x_n) = n^2 \log n$$

De totes aquestes condicions de definició de $\{x_n\}$ i $\varphi(x)$ es dedueix fàcilment que

$$x_{n+1} = x_n \left(1 + \frac{1}{(\varphi(x_{n-1}))^{1/\log(n-1)}}\right) \quad n \geq 2$$

Representem ara per $\tau(x)$ la funció definida per

$$\tau(x) = \frac{1}{\log n} \quad \text{per a} \quad x_n \leq x < x_{n+1}.$$

Amb aquesta definició resulta evident que si $x_n \leq x < x_{n+1}$

$$x_{n+2} > x \left(1 + \frac{1}{(\varphi(x))^{\tau(x)}} \right)$$

i del fet que $\varphi(x)$ és una funció creixent segueix que

$$\varphi(x_n) \leq \varphi(x) < \varphi \left(x \left(1 + \frac{1}{(\varphi(x))^{\tau(x)}} \right) \right) \leq \varphi(x_{n+1}),$$

i com que $\varphi(x_{n+2}) \leq (1 + o(1))\varphi(x_n)$, resulta

$$\varphi \left(x \left(1 + \frac{1}{(\varphi(x))^{\tau(x)}} \right) \right) \leq (1 + o(1)) \varphi(x).$$

És evident que la successió $\{x_n\}$ tendeix vers un nombre finit A i que, per contra,

$$\lim_{x \rightarrow A} \varphi(x) = \infty$$

Per altra banda, és fàcil de demostrar que la funció $\varphi(x)$ és convexa respecte a x . En efecte: cal demostrar únicament que

$$(1.1.1) \quad \frac{\varphi(x_{n+1}) - \varphi(x_n)}{x_{n+1} - x_n} < \frac{\varphi(x_{n+2}) - \varphi(x_{n+1})}{x_{n+2} - x_{n+1}}$$

En primer lloc es veu fàcilment que

$$x_{n+1} - x_n > x_{n+2} - x_{n+1}$$

I en segon lloc, després de càlculs relativament fàcils però laboriosos, trobem

$$\varphi(x_{n+1}) - \varphi(x_n) < \varphi(x_{n+2}) - \varphi(x_{n+1})$$

i, evidentment, aquestes dues desigualtats ens donen la (1.1.1).

Si ara posem

$$\psi(\log x) = \varphi(x)$$

la $\psi(\log_2 x)$ serà una funció convexa de $\log x$, i satisfarà la

$$\psi \left(\log_2 x + \frac{1}{(\psi(\log_2 x))^{\tau_1(x)}} \right) \leq (1 + o(1)) \psi(\log_2 x),$$

on $\tau_1(x) = 2\tau(\log x)$.

Ara: si $\gamma(\psi)$ representa la funció inversa de $\psi(y)$, escrivint

$$g(r) = (\log, r) \max_{r' \leq r} \frac{\log_2 M(r', f)}{\log r'}$$

i definint $U(x)$ per

$$(1.1.2) \quad U(\log_2 r) = \max_{r' < r} \psi(\log_2 r + \gamma(g(r')) - \log_2 r')$$

resulta que $U(\log_2 r)$ és una funció contínua. En efecte: sigui r'_0 la quantitat que rendeix màxim el segon membre de (1.1.2), l'existència d'almenys un valor de r' amb aquesta propietat és evident segons les propietats de ψ i de g . Sigui ara r_1 un valor pròxim a r i que verifica $r_1 > r$. Si representem per r'_1 el valor que rendeix màxim

$$\psi(\log_2 r_1 + \gamma(g(r'_1)) - \log_2 r'_1)$$

i que serveix per a la definició del valor de $U(\log_2 r_1)$, tindrem

$$U(\log_2 r) \geq \psi(\log_2 r + \gamma(g(r'_1)) - \log_2 r'_1)$$

i, per tant,

$$\gamma(g(r'_0)) - \log_2 r'_0 \geq \gamma(g(r'_1)) - \log_2 r'_1$$

i com que és evident que $U(\log_2 r) \leq U(\log_2 r_1)$, resulta que

$$\psi(\log_2 r + \gamma(g(r'_0)) - \log_2 r'_0) \leq U(\log_2 r_1) \leq \psi(\log_2 r_1 + \gamma(g(r'_0)) - \log_2 r'_0)$$

i com que ψ és una funció contínua, queda demostrat que $U(\log_2 r)$ és una funció contínua a la dreta. La continuïtat a l'esquerra es demostra d'una manera semblant.

De la definició de $U(\log_2 r)$ segueix

$$\log_2 M(r, f) \leq U(\log_2 r).$$

A més, ens interessa també de demostrar l'existència d'una successió $\{r_n\}$ tal que $r_n \rightarrow \infty$ i que

$$\log_2 M(r_n, f) = U(\log_2 r_n).$$

Per demostrar això últim es pot procedir de la forma següent: en primer lloc és evident que els punts on es verifiquen

$$U(\log_2 r) > g(r)$$

són interiors a uns intervals $r'' < r < r'$, on

$$U(\log_2 r) = \psi(\log_2 r + \gamma(g(r')) - \log_2 r')$$

on r' és un valor que satisfà la

$$(1.1.3) \quad U(\log_2 r') = g(r').$$

Del fet que $\psi(\log_2 r)$ és convex respecte a $\log r$ i que $\psi(\log_2 x) \rightarrow \infty$ quan $\log x \rightarrow A$, resulta que el valor de r' que intervé en (1.1.3) no pot ésser interior a un interval en el qual

$$g(r) = C \log r$$

on C és una constant, o sigui que no pot satisfer

$$g(r') > \log_2 M(r', f)$$

i, per tant, resulta demostrat que

$$U(\log_2 r') = \log_2 M(r', f)$$

i com que acabem de demostrar que aquesta igualtat és necessàriament satisfeta per valors de r' tan grans com vulguem, queda demostrada l'existència de la successió $\{r_n\}$ amb les propietats indicades.

Ara: si la funció $U(\log_2 r)$ no és una funció convexa de $\log r$ per qualsevol valor de r , procedirem de la manera següent: A partir, per exemple, del punt $r_0 = e$ seguirem la corba $U = U(\log_2 r)$ fins al primer punt r' (que pot coincidir amb r_0) en la proximitat del qual la corba deixa d'ésser convexa; aleshores, a partir d'aquest punt seguirem la funció lineal respecte a $\log r$

$$a(\log r - \log r') + U(\log_2 r')$$

on

$$a = \left(\frac{d}{d \log r} \psi(\log_2 r + y(U(\log_2 r'))) - \log_2 r' \right)_{r=r'}$$

i seguirem aquesta funció lineal mentre serà superior a $U(\log_2 r)$. Si el punt final d'aquest tros lineal és un punt interior a un dels trossos format per una translació de ψ , podrem continuar seguint la corba $U(\log_2 r)$, sense deixar de complir la condició de convexitat, fins a un punt on

$$\log_2 M(r, f) = U(\log_2 r).$$

Si el punt final és un altre punt qualsevol, tindrem ja

$$\log_2 M(r, f) = U(\log_2 r),$$

car a partir d'un valor suficientment gran de r , el tros lineal no pot tallar la corba primitiva en un punt on

$$\log_2 M(r, f) < g(r).$$

Aleshores, a partir d'aquest punt que hem definit repetirem el mateix

procés. Per tant, hem demostrat que existeix una funció $U_1(\log_2 r)$ convexa respecte a $\log r$ tal que

$$\log_2 M(r, f) \leq U_1(\log_2 r)$$

el signe igualtat essent satisfet per una successió de valors de r que tendeix a l'infinit. És evident que si $r_1 > r$ serà satisfeta

$$(1.1.4) \quad U_1(\log_2 r_1) \leq \psi(\log_2 r_1 + \gamma(U_1(\log_2 r)) - \log_2 r)$$

i si posem

$$\log_2 r_1 = \log_2 r + \frac{1}{(U_1(\log_2 r))^{\tau_1(r)}}$$

com que $U_1(\log_2 r) = \psi(\gamma(U_1(\log_2 r)))$, tindrem

$$\begin{aligned} \psi(\log_2 r_1 + \gamma(U_1(\log_2 r)) - \log_2 r) &= \psi\left(\gamma(U_1(\log_2 r)) + \frac{1}{(\psi(\gamma(U_1(\log_2 r))))^{\tau_1(r)}}\right) < \\ &< (1 + o(1))\psi(\gamma(U_1(\log_2 r))) = (1 + o(1))U_1(\log_2 r) \end{aligned}$$

i aleshores, de la (1.1.4) resulta

$$(1.1.5) \quad U_1\left(\log_2 r + \frac{1}{(U_1(\log_2 r))^{\tau_1(r)}}\right) \leq (1 + o(1))U_1(\log_2 r).$$

Finalment hom pot demostrar fàcilment que si posem

$$W(r) = e^{U_1(\log_2 r)}$$

la $W(r)$ satisfà les condicions (I) i (V) indicades al principi. Si ara definim $\epsilon(r)$ per les igualtats

$$(1.1.6) \quad \begin{aligned} \tau_2(r) &= \tau_1(r) + \frac{1}{\log(\log_2 W(r)) - \log_2 r} \\ \left(\frac{\log r}{\log W(r)}\right)^{\epsilon(r)} &= \min_{r' \leq r} \left(\frac{\log r'}{\log W(r')}\right)^{\tau_2(r)} \end{aligned}$$

les condicions (II), (III) i (IV) seran també satisfetes. En efecte: com que f és d'ordre infinit, les propietats de W ens permeten de demostrar que

$$\frac{\log r}{\log W(r)} \rightarrow 0$$

i, per tant, per r suficientment gran

$$\left(\frac{\log r}{\log W(r)}\right)^{\tau_2(r)} \leq 1$$

d'on

$$(1.1.7) \quad \left(\frac{\log r}{\log W(r)} \right)^{\tau_2(r)} < \left(\frac{\log r}{\log W(r)} \right)^{\tau_1(r)} \quad \text{i} \quad \left(\frac{\log r}{\log W(r)} \right)^{\tau_2(r)} \rightarrow 0$$

i de (1.1.6)

$$(1.1.8) \quad \left(\frac{\log r}{\log W(r)} \right)^{\epsilon(r)} \leq \left(\frac{\log r}{\log W(r)} \right)^{\tau_2(r)}$$

i, en conseqüència,

$$\left(\frac{\log r}{\log W(r)} \right)^{\epsilon(r)} \rightarrow 0 \text{ monòtonament quan } r \rightarrow \infty$$

i, per tant, com sigui que $\tau_2(r) \rightarrow 0$, de (1.1.5), (1.1.6), (1.1.7) i (1.1.8), resulta que la $W(r)$ i la $\epsilon(r)$ satisfan les condicions (II), (III) i (IV), i com que, segons ja hem vist, la (I) i la (V) també són satisfetes, queda demostrat el que volíem.

Resulta també fàcil de veure que tota funció $W(r)$ que satisfà les condicions (I), (II), (III) i (IV), satisfà també

$$(II') \quad W \left(r \left(1 + k \left(\frac{\log r}{\log W(r)} \right)^{\epsilon(r)} \right) \right) \leq (W(r))^{1+o(1)}$$

per qualsevol nombre natural k .

1.2. — Posem

$$f(z) = \sum a_n z^n$$

i aleshores representem $\mu(r)$ per la igualtat

$$\mu(r) = \max_{n \geq 0} |a_n| r^n$$

i sigui $\nu(r)$ el valor màxim de n que verifica

$$\mu(r) = |a_{\nu(r)}| r^{\nu(r)}$$

Quan hi podrà haver dubte sobre la funció a què es refereixen, escriurem $\mu(r, f)$ i $\nu(r, f)$ en lloc de $\mu(r)$ i $\nu(r)$.

Amb aquestes notacions podrem enunciar i demostrar el lema següent:

LEMA 1. — Si $f(z)$ és una funció entera d'ordre infinit, i si $W(r)$ és la funció corresponent definida en el número anterior, aleshores

$$\begin{aligned} \nu(r) &\leq (W(r))^{1+o(1)} \\ \mu(r) &\leq M(r, f) \leq \mu(r) (W(r))^{1+o(1)} \end{aligned}$$

Demostració. — A fi de simplificar les fórmules, d'ara endavant escriurem $\alpha(r)$ en lloc de

$$\left(\frac{\log r}{\log W(r)} \right)^{\varepsilon(r)}.$$

La desigualtat

$$\mu(r) \leq M(r, f)$$

és ja clàssica i es dedueix fàcilment de les fórmules de Cauchy. Per altra banda, també és prou coneguda la relació

$$\log \mu(r) = \log \mu(r_0) + \int_{r_0}^r \frac{\nu(x)}{x} dx$$

i, per tant, si r és suficientment gran, podrem escriure, donades les propietats de $W(r)$,

$$\int_r^{r(1+\alpha(r))} \frac{\nu(x)}{x} dx \leq W(r(1+\alpha(r))) \leq (W(r))^{1+o(1)}$$

d'on es dedueix

$$\nu(r) \log(1+\alpha(r)) \leq (W(r))^{1+o(1)}$$

i d'aquí resulta la primera afirmació del lema, o sigui

$$(1.2.1) \quad \nu(r) \leq (W(r))^{1+o(1)}$$

Per altra banda, és evident que

$$|a_n| R^n \leq (R/r)^{\nu(R)} \mu(r)$$

i, per tant,

$$M(r, f) \leq (\nu(R) + 1) \mu(r) + \mu(r) \sum_1^R (r/R)^n$$

i si posem $R = r(1 + \alpha(r))$, tindrem

$$(1.2.2) \quad M(r, f) \leq \mu(r) \left(\nu(r(1 + \alpha(r))) + 1 + \frac{1}{\alpha(r)} \right)$$

i com que

$$\frac{1}{\alpha(r)} < (W(r))^{o(1)}$$

de (1.2.1) i (1.2.2) i de les propietats de $W(r)$, resulta finalment

$$M(r, f) \leq \mu(r) (W(r))^{1+o(1)}$$

desigualtat que acaba de demostrar el lema.

1.3. — Una conseqüència gairebé immediata del lema 1 és el següent:

LEMA 2. — Si $f(z) = \sum a_n z^n$ és d'ordre infinit i $W(r)$ és la funció definida anteriorment, i si $\{r_k\}$ és una successió tal que $r_k \rightarrow \infty$

$$\frac{\log_2 M(r_k, f)}{\log W(r_k)} \rightarrow 1$$

aleshores, sigui la que sigui la successió $\{\theta_n\}$ de nombres reals, la funció

$$g(z) = \sum a_n e^{i\theta_n} z^n$$

satisfà

$$\frac{\log M(r_k, f)}{\log M(r_k, g)} \rightarrow 1 \quad \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{\log_2 M(r, g)}{\log W(r)} = 1$$

Demostració. — Les conclusions del lema resulten de les relacions

$$(1.3.1) \quad \begin{aligned} \mu(r, f) &= \mu(r, g) \\ \frac{\log W(r_k)}{\log M(r_k, f)} &\rightarrow 0 \end{aligned}$$

que són quasi evidents.

LEMA 3. — Si en el lema anterior la successió $\{r_k\}$ és tal que, a més, verifica $\nu(r_k) < \nu(r_{k+1})$, i si posem $n_k = \nu(r_k)$, aleshores la funció

$$f_0(z) = \sum a_{n_k} z^{n_k}$$

també verificarà

$$\frac{\log M(r_k, f_0)}{\log M(r_k, f)} \rightarrow 1 \quad \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{\log_2 M(r, f_0)}{\log W(r)} = 1$$

Demostració. — La demostració és gairebé igual a la del lema 2, ja que és evident que

$$\mu(r_k, f) = \mu(r_k, f_0)$$

i és suficient d'utilitzar aquesta igualtat en lloc de la (1.3.1).

1.4. — Per un procediment gairebé igual al que vaig utilitzar en un treball anterior [4, lema 4] però utilitzant les funcions $W(r)$ definides en aquest capítol en lloc dels ordres de K.L. Hiong [1], que empràvem aquella vegada, podem demostrar el:

LEMA 4. — *Siguin $f(z)$ i $g(z)$ dues funcions enteres que verifiquen*

$$\overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{\log_2 M(r, f)}{\log W(r)} \leq \theta < 1, \quad \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{\log_2 M(r, g)}{\log W(r)} \leq \theta < 1$$

aleshores, per r suficientment gran i per qualsevol $\theta' > \theta$, existiran dos valors r' i r'' que satisfaran

$$r < r' < r' + \frac{r}{(W(r))^{\theta'}} \leq r'' < r(1 + \alpha(r))$$

i tals que en la corona $r' < |z| < r''$ les dues funcions $f(z)$ i $g(z)$ vénen afitades inferiorment per

$$\log |f(z)| > -(W(r))^{\theta'} \quad \log |g(z)| > -(W(r))^{\theta'}$$



•

II

2.1. — Ara demostrarem un teorema que en certs aspectes és més general que un resultat de Polya [3], i que és probable que, precisant més la demostració, hom podria aconseguir que fos més precís que el de Polya en tots els aspectes.

Sigui $W(r)$ una funció que verifica les condicions (I), (II), (III) i (IV) del número 1.1. Aleshores representarem per S_w el conjunt de totes les funcions enteres $F(z)$ tals que

$$\overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{\log_2 M(r, F)}{\log W(r)} = 1.$$

El subconjunt A_w serà el format per totes les funcions $F \in S_w$ per a les quals existeix una funció $f(z)$ entera i tal que

$$\overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{\log_2 M(r, f)}{\log W(r)} < 1$$

i

$$\overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{\log n(r, (F - f)^{-1})}{\log W(r)} < 1$$

on $n(r, (F - f)^{-1})$ és, seguint les notacions de Nevanlinna, el nombre de zeros de $F(z) - f(z)$ interiors al cercle $|z| \leq r$. El complement de A_w en relació a S_w serà representat per B_w . Amb aquestes notacions podem ja enunciar el teorema:

TEOREMA I. — Si $F_1(z) = \sum a_n z^n \in S_w$, existeix sempre almenys una successió $\{n_k\}$ de nombres naturals (que pot dependre de F_1) tal que, si $\epsilon_n = -1$ quan $n \in \{n_k\}$ i $\epsilon_n = 1$ quan $n \notin \{n_k\}$, aleshores $F_2(z) = \sum \epsilon_n a_n z^n \in B_w$.

Demostració. — Suposem que $F_1 \in A_w$, car si $F_1 \in B_w$ el teorema és evident. Definim ara una successió $\{r_k\}$ que tingui les propietats següents

$$v(r_k, F_1) \rightarrow v(r_{k+1}, F_1), \quad r_k \rightarrow \infty$$

$$\frac{\log_2 M(r_h, F_1)}{\log W(r_h)} \rightarrow 1$$

si, com en el lema 3, escrivim $n_k = v(r_h, F_1)$ i posant

$$F_0(z) = \sum a_{n_k} z^{n_k}$$

aleshores per definició $F_1(z) = F_2(z) + 2F_0(z)$.

Contràriament al que afirma el teorema, suposem que sigui possible que es compleixin al mateix temps $F_1 \in A_{\infty}$ i $F_2 \in A_{\infty}$. Segons la definició de A_{∞} i com sigui que les nostres funcions $W(r)$ tenen a fortiori totes les propietats de les funcions corresponents definides per K.L. Hiong [1], es podran formar dos productes canònics $f_{1,1}(z)$ i $f_{1,2}(z)$ i existiran dues funcions enteres $f_{2,1}(z)$ i $f_{2,2}(z)$ tals que

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\log_2 M(r, f_{h,s})}{\log W(r)} < 1 \quad (h = 1, 2 \quad s = 1, 2)$$

de manera que

$$(2.1.1) \quad F_s(z) - f_{2,s}(z) = f_{1,s}(z) e^{p_s(z)} \quad (s = 1, 2)$$

on $\varphi_1(z)$ i $\varphi_2(z)$ són dues funcions enteres.

Per hipòtesi existeix un $\theta < 1$ tal que

$$\log M(r, f_{1,s}) < (W(r))^{\theta} \quad (s = 1, 2)$$

i, per tant, segons el lema 4, qualsevol que sigui θ' tal que $\theta < \theta' < 1$, existeix un R tal que

$$r < R < r(1 + \alpha(r))$$

i que per a $|z| = R$

$$\log |f_{1,s}(z)| > - (W(r))^{\theta'} \quad (s = 1, 2)$$

i, per tant, de (2.1.1) segueix per a $|z| = r$

$$(2.1.2) \quad \Re(\varphi_s(z)) < (W(r))^{1+\theta(1)} \quad (s = 1, 2)$$

on $\Re(Z)$ és la part real de Z .

Aleshores, segons un teorema de Caratheodory de (2.1.2), resulta

$$(2.1.3) \quad M(r, \varphi_s) < (W(r))^{1+\theta(1)} \quad (s = 1, 2)$$

i una fórmula clàssica dóna

$$(2.1.4) \quad M(r, \varphi'_s) < (W(r))^{1+\theta(1)} \quad (s = 1, 2)$$

Per a deduir (2.1.3) i (2.1.4) de (2.1.2) cal tenir en compte les propietats de les $W(r)$.

Segons les hipòtesis de (2.1.1), es dedueix

$$\frac{M(r_k, \varphi_s)}{\log M(r_k, F_s)} > 1 - o(1)$$

o sigui

$$M(r_k, \varphi_s) > (W(r_k))^{1-o(1)}$$

i de (2.1.3) i aquesta última desigualtat és possible de deduir com en el lema 1

$$M(r_k, \varphi_s) < \mu(r_k, \varphi_s) (\log W(r_k))^{1+o(1)}$$

i per procediments ja clàssics podem afirmar que

$$\nu(r_k, \varphi_s) > (1 - o(1)) \frac{\log W(r_k)}{\log r_k}.$$

i d'aquí

$$(2.1.5) \quad (\nu(r_k, \varphi_s))^{-1/15} < o(1) \alpha(r_k)$$

Si posem

$$\varphi_s(z) = \sum b_m^{(s)} z^m \quad (s = 1, 2)$$

de les desigualtats anteriors, segueix que per a $m < \nu(r_k, \varphi_s)$

$$(2.1.6) \quad |b_m^{(s)}| |r_k(1 + \alpha(r_k))|^m e^{-m^{1/15}} < \\ < |b_{\nu(r_k, \varphi_s)}^{(s)}| [r_k(1 + \alpha(r_k))]^{\nu(r_k, \varphi_s)} e^{-(\nu(r_k, \varphi_s))^{1/15}}$$

I si representem per $J_s(r)$ el valor de m que rendeix màxim

$$|b_m^{(s)}| r^m e^{-m^{1/15}}$$

tindrem

$$J_s(r_k(1 + \alpha(r_k))) > \nu(r_k, \varphi_s).$$

A més, aplicant uns resultats de Valiron [9], segueix de (2.1.6) que si

$$\log r_k^{(s)} = \log r_k + \log(1 + \alpha(r_k)) - \frac{14}{15} \frac{1}{(J_s(r_k(1 + \alpha(r_k))))^{1/15}}$$

$r_k^{(s)}$ serà un valor ordinari de φ_s en el sentit que Valiron dóna a aquest mot.

Recordant de nou els resultats de Valiron, podem demostrar que els intervals excepcionals compresos entre $r_k(1 + \alpha(r_k))$ i $r_k(1 + 2\alpha(r_k))$ són en nombre inferior a

$$(\log W(r_k))^{1+o(1)}$$

i la suma de llurs longituds, segons (2.1.5), és inferior a

$$\frac{14}{15} (\nu(r_k, \varphi_s))^{-1/15} < o(1)\alpha(r_k)$$

i raonant com en la demostració del lema 4 [4], de les desigualtats anteriors, i de les hipòtesis, podem deduir que existeixen dues successions $\{r'_k\}$ i $\{r''_k\}$ que verifiquen

$$(2.1.7) \quad r_k < r'_k < r'_k + \frac{r_k}{(W(r_k))^\theta} \leq r''_k < r_k(1 + 2\alpha(r_k))$$

i tals que tots els valors de r que satisfan a $r'_k < r < r''_k$ són valors ordinaris en el sentit de Valiron, tant per φ_1 com per φ_2 . A més, en la corona $r'_k < |z| < r''_k$, són verificades les

$$(2.1.8) \quad \log |f_{1,s}(z)| > -(W(r_k))^{0'}.$$

A més de les propietats que fins ara hem admès que satisfia la successió $\{r_k\}$ suposem, cosa sempre possible, que verifica

$$k = O(\nu(r_k, F_1)^{1-\beta})$$

on β satisfà

$$1 > \beta > 0 \quad \frac{\beta}{1-\beta} > \theta'$$

Aleshores, aplicant un resultat de Mandelbrojt, hom pot demostrar que qualsevol punt de la circumferència $|z| = r_k''' = \frac{r'_k + r''_k}{2}$ es troba a una distància inferior a $(W(r_k))^{-\theta''}$ d'un punt z' on

$$(2.1.9) \quad \log |F_0(z')| > (W(r_k))^{1-o(1)}$$

on

$$\theta' < \theta'' < \min \left(1, \frac{\beta}{1-\beta} \right).$$

Per a la demostració d'aquest resultat hom pot consultar [7, pàg. 25].

Segons (2.1.7), i de la definició de z' , resulta que $r'_k < |z'| < r''_k$ i, per tant, és fàcil de deduir de (2.1.9), de (2.1.1), de (2.1.4) i de

$$(2.1.10) \quad -2F_0(z) = F_2(z) - F_1(z)$$

que en tot punt de la circumferència $|z| = r_k'''$ tindrem

$$\begin{aligned} & \max (\Re(\varphi_1(z)), \Re(\varphi_2(z))) > \max (\Re(\varphi_1(z')), \Re(\varphi_2(z'))) - \\ & - \max (\varphi'_1(z'), \varphi'_2(z')) |z - z'| > (W(r_k))^{1-o(1)} - (W(r_k))^{(1-\theta'')(1-o(1))} \end{aligned}$$

on z' és un valor que verifica (2.1.9). Per consegüent, una almenys de les desigualtats:

$$(2.1.11) \quad \begin{cases} \Re(\varphi_1(z)) > (W(r_k))^{1-o(1)} \\ \Re(\varphi_2(z)) > (W(r_k))^{1-o(1)} \end{cases}$$

serà satisfeta. I com que podem suposar que $\varphi_1(0) = 0$ i $\varphi_2(0) = 0$, hom pot demostrar per la teoria de les funcions harmòniques que no és sempre la mateixa de les desigualtats anteriors la que és satisfeta, i, per tant,

$$M(r'''_k \varphi_1) > (W(r_k))^{1-o(1)} \quad M(r'''_k \varphi_2) > (W(r_k))^{1-o(1)}$$

Ara: com que per la definició de r'_k i r''_k el valor de r'''_k és un valor ordinarí segons Valiron, tindrem

$$\begin{aligned} \max_{|z|=r'''_k} \Re(\varphi_1) &> (1 - o(1)) M(r'''_k \varphi_1) \\ \max_{|z|=r'''_k} \Re(\varphi_2) &> (1 - o(1)) M(r'''_k \varphi_2) \end{aligned}$$

i de les (2.1.1), i de (2.1.8) resulta

$$\lim \frac{M(r'''_k \varphi_s)}{\log M(r'''_k F_s)} = 1 \quad (s = 1, 2)$$

i segons el lema 2

$$\lim \frac{M(r'''_k \varphi_1)}{M(r'''_k \varphi_2)} = 1.$$

D'altra banda, i puix que, segons que hem dit, r'''_k és un valor ordinarí de Valiron, existirà almenys un punt z_k tal que $|z_k| = r'''_k$ i

$$\Re(\varphi_1(z_k)) < (1 - o(1)) M(r'''_k \varphi_1)$$

i, per tant, de les (2.1.1) i (2.1.10), i del fet que almenys una de les (2.1.11) ha d'ésser satisfeta, resulta fàcilment

$$(2.1.12) \quad \Re(\varphi_2(z_k)) \sim \log M(r'''_k F_0)$$

i aleshores, segons la teoria de Valiron per a qualsevol valor de $t < \frac{\pi}{3\nu(r'''_k \varphi_1)}$, tindrem

$$\Re(\varphi_1(z_k e^{it})) < 0$$

i, per consegüent, serà vàlida la

$$\Re(\varphi_2(z_k e^{it})) \sim \log M(r'''_k F_0).$$

Aplicant de nou la teoria de Valiron, resulta

$$(2.1.13) \quad v(r'''_k, \varphi_2) = o(v(r'''_k, \varphi_1)).$$

Si en lloc de considerar z_k , haguéssim considerat z'_k tal que

$$\Re(\varphi_2(z'_k)) < -(1 - o(1))M(r'''_k, \varphi_2).$$

cosa també possible, hauríem arribat a

$$v(r'''_k, \varphi_1) = o(v(r'''_k, \varphi_2))$$

contràriament a la (2.1.13). Aquesta contradicció demostra el teorema, ja que hi hem arribat suposant que el teorema és fals.

III

3.1. — Com tot al llarg d'aquest treball, considerarem que la funció $W(r)$ verifica (I), (II), (III) i (IV), i igual que en el capítol anterior, representarem per S_w el conjunt de totes les funcions $F(z)$ tals que

$$\overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{\log_2 M(r, F)}{\log W(r)} = 1.$$

Però ara considerarem l'espai topològic S_w suposant que la topologia és la de la convergència uniforme en els compactes. D'altra banda, a fi d'abreujar direm simplement l'espai S_w i voldrem ja indicar l'espai amb la topologia citada. Igualment, quan parlarem d'un sub-espai $S_{w,t}$ entendrem que la topologia d'aquest és la relativització de la topologia de S_w a $S_{w,t}$ sense que ho diguem explícitament.

Són coneguts els resultats següents:

- 1) S_w i $S_{w,t}$ són metritzables.
- 2) Els conjunts

$$U = U(r, \varepsilon) = \{F \mid M(r, F - f) < \varepsilon, F \in S_w, f \in S_{w,t}\}$$

formen una base per a la topologia de S_w , i si suposem que $F \in S_{w,t}$ i $f \in S_{w,t}$ serà també una base per a la topologia de $S_{w,t}$.

3.2. — En aquest capítol demostrarem que les funcions que tenen certes propietats són «excepcionals». El sentit que donarem a aquest mot «excepcional» serà el següent: el conjunt format per totes les funcions que tenen aquestes propietats són de primera categoria mentre l'espai total és de segona categoria.

En aquest número demostrarem que l'espai S_w no és útil per a l'objectiu d'aquest capítol. En efecte: demostrarem el que segueix:

TEOREMA II. — *L'espai S_w és de primera categoria*

Remarca. — Aquest teorema prova clarament que encara que demostréssim que un subconjunt de S_w és de primera categoria, no podríem

sense més afirmar que els punts d'aquests conjunts són «poc nombrosos» relativament a S_w .

Demostració. — Sigui

$$H_m = \left\{ F \mid F \in S_w, \log_2 M(r, F) \leq \frac{3}{2} \log W(r) \text{ per a } r > m \right\}$$

Aleshores és fàcil de demostrar, per mitjà de la teoria de les famílies normals, que H_m és clos.

D'altra banda, H_m és no dens, car si $F_1(z)$ és una funció qualsevol de S_w tot entorn

$$E_1 = \left\{ F \mid M(R_1, F - F_1) < \varepsilon_1 \right\}$$

conté en el seu interior un altre entorn

$$E_2 = \left\{ F \mid M(R_2, F - F_2) < \varepsilon_2 \right\}$$

tal que $E_2 \cap H_m = \emptyset$ o sigui que E_2 no conté cap funció de H_m . En efecte: posem

$$F_1(z) = \sum a_n z^n$$

Si $F_1 \notin H_m$ el resultat és evident, ja que, segons hem vist, H_m és clos.

Suposem, doncs, que $F_1 \in H_m$. Aleshores és possible de trobar un nombre real $\theta < 1$ tal que

$$M(R_1, (\theta - 1)F_1) < \varepsilon' < \varepsilon_1$$

Ara: com que $(W(r))^2$ té les mateixes propietats que $W(r)$ i, per tant, satisfà totes les condicions de les funcions corresponents de K.L. Hiong [1], podem construir una funció $\Phi(z) = \sum c_n z^n$ ($c_n > 0$) tal que

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\log_2 M(r, \Phi)}{\log W(r)} = 2$$

D'altra banda, és possible, evidentment, de trobar un $\theta_1 > 0$ tal que

$$(3.2.1) \quad \theta_1 \Phi(R_1) = M(R_1, \theta_1 \Phi) < \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon'}{2}$$

i segons el lema 1 existeix una successió infinitament creixent de valors de r en els quals

$$\log_2 \mu(r, \theta_1 \Phi) > \frac{7}{4} \log W(r).$$

Per tant, com que suposem que $F_1 \in S_w$, podrem determinar un $r_1 > \max(m, R_1)$ tal que, representant per $F_2(z)$ la

$$F_2(z) = \theta F_1(z) + \theta_1 c_{v(r_1, \Phi)} z^{v(r_1, \Phi)}$$

sigui satisfeta la

$$(3.2.2) \quad \log_2 M(r_1, F_2) > \frac{3}{2} \log W(r_1).$$

Per consegüent, de (3.2.1) i (3.2.2) resulta $F_2 \in E_1$ i $F_2 \notin H_m$, i com que hem demostrat que H_m és clos, queda demostrada l'existència d'un entorn amb les propietats de l' E_2 . Això demostra que H_m és no dens.

Finalment, per definició

$$S_w = \bigcup_{m \geq 1} H_m.$$

Això acaba de demostrar el teorema II.

3.3. — A més de la funció $W(r)$, suposem donada una funció contínua $t(r)$ tal que $t(r) > 0$ i $t(r) \rightarrow 0$ quan $r \rightarrow \infty$. Aleshores podem definir l'espai $S_{w,t}$ (sub-espai de S_w) de la manera següent: una funció $F(z) = \sum a_n z^n \in S_{w,t}$ si, i solament si, $F \in S_w$ i

$$\log_2(\sum |a_n| r^n) \leq (1 + t(r)) \log W(r)$$

Com he dit, la topologia que suposem a $S_{w,t}$ és definida per la convergència uniforme en els compactes (considerant, naturalment, únicament funcions que pertanyen a $S_{w,t}$). Amb aquesta topologia hom pot demostrar que

TEOREMA III. — *L'espai $S_{w,t}$ és de segona categoria.*

Remarca. — Aquest teorema no contradiu el teorema II, ja que és sabut que un sub-espai d'un espai de primera categoria pot ésser de segona categoria, si és considerat com a espai en si mateix sense tenir en compte els punts pertanyents a l'espai primitiu i que no pertanyen a ell.

Demostració. — Sigui $\{A_n\}$ una successió de conjunts closos no densos i tals que

$$A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \dots \subset A_n \subset \dots \subset S_{w,t}$$

Per hipòtesi existirà almenys una funció $F_1 \in S_{w,t}$ tal que $F_1 \notin A_1$. També per hipòtesi és possible de determinar un R_1 tal que

$$\log_2 M(R_1, F_1) > \frac{1}{2} \log W(R_1).$$

A més, com que A_1 és clos, existirà un entorn

$$E_1 = \left\{ F \mid M(n_1, F - F_1) < \frac{1}{n_1^2}, F \in S_{w,t} \right\}$$

on n_1 és un enter, que verifica $E_1 \cap A_1 = \emptyset$. Res no ens impedeix d'admetre que $n_1 > R_1$.

Suposem definides ja $F_1, F_2, \dots, F_k$ i els entorns $E_1, E_2, \dots, E_k$, i definim ara la funció F_{k+1} i l'entorn E_{k+1} com segueix: Ja que A_{k+1} és clos i no dens, existirà almenys una funció F_{k+1} tal que $F_{k+1} \in E_k$ i $F_{k+1} \notin A_{k+1}$. Aleshores podrem determinar un $R_{k+1} > n_k$ tal que

$$\log_2 M(R_{k+1}, F_{k+1}) > \left(1 - \frac{1}{k+2}\right) \log W(R_{k+1})$$

i per les mateixes raons que A_{k+1} és clos i no dens, podrem determinar un entorn

$$E_{k+1} = \left\{ F \mid M(n_{k+1}, F - F_{k+1}) < \frac{1}{n_{k+1}^2}, F \in S_{w,t} \right\}$$

tal que $\bar{E}_{k+1} \subset E_k$ i $E_{k+1} \cap A_{k+1} = \emptyset$, on $\bar{E}_{k+1}$ és la clausura de E_{k+1} i n_{k+1} és un enter tal que $n_{k+1} > R_{k+1}$.

D'aquesta manera podem definir la successió $\{F_k\}$, i com que $F_k \in S_{w,t}$ i, per tant,

$$\log_2 M(r, F_k) \leq (1 + t(r)) \log W(r)$$

la successió serà uniformement afitada en qualsevol cercle $|z| < r$, i, segons la teoria de les famílies normals, podrem extreure de $\{F_k\}$ una successió parcial $\{F_{k_m}\}$ que convergeix vers una funció entera F , uniformement en tot domini afitat.

Escriguem

$$F_{k_m}(z) = \sum a_n^{(m)} z^n, \quad F(z) = \sum a_n z^n,$$

aleshores, pels resultats clàssics de la teoria de funcions, tindrem

$$(3.3.1) \quad a_n^{(m)} \rightarrow a_n \quad \text{quan} \quad m \rightarrow \infty$$

i ja que $F_{k_m} \in S_{w,t}$ per hipòtesi

$$\log_2(\sum |a_n^{(m)}| r^n) \leq (1 + t(r)) \log W(r)$$

i de (3.3.1) segueix

$$(3.3.2) \quad \log_2(\sum |a_n| r^n) \leq (1 + t(r)) \log M(r)$$

D'altra banda,

$$|M(R_k, F_k) - M(R_k, F_{k_m})| \leq \sum_k \frac{1}{n_m^2} = o(1)$$

i, per tant, ja que

$$M(R_k, F) = \lim M(R_k, F_{k_m})$$

tindrem

$$\log_2 M(R_k, F) > \log_2 M(R_k, F_k) - o(1)$$

i com sigui que

$$\log_2 M(R_k, F_k) > \left(1 - \frac{1}{k+1}\right) \log W(R_k)$$

resulta finalment

$$(3.3.3) \quad \log_2 M(R_k, F) > (1 - o(1)) \log W(R_k)$$

i de (3.3.2) i (3.3.3) segueix $F \in S_{w,t}$.

Ara: ja que $F \in E_k$ per qualsevol valor de k , resulta que $F \notin A_k$, és a dir, $S_{w,t}$ no és la unió d'una successió de conjunts closos no densos, o sigui $S_{w,t}$ és de segona categoria.

3.4. — En el capítol II hem definit els subconjunts A_w i B_w de S_w . Si ara posem

$$A_{w,t} = A_w \cap S_{w,t}, \quad B_{w,t} = B_w \cap S_{w,t}$$

Com que $S_{w,t} \subset S_w$ i A_w és el complement de B_w en relació a S_w , tindrem

$$A_{w,t} \cup B_{w,t} = S_{w,t} \quad A_{w,t} \cap B_{w,t} = \emptyset$$

és a dir, que $A_{w,t}$ serà el complement de $B_{w,t}$ en relació a $S_{w,t}$.

TEOREMA IV. — *El conjunt $A_{w,t}$ és un F_σ de primera categoria i $B_{w,t}$ és un G_δ dens de segona categoria.*

Demostració. — Sigui A_k el conjunt de les funcions $F \in S_{w,t}$ tals que per a cada una existeix una funció entera $f(z)$ que, per a $r > k$ verifica

$$(3.4.1) \quad \log_2 M(r, f) \leq \left(1 - \frac{1}{k}\right) \log W(r)$$

$$(3.4.2) \quad \log n(r, 1/(F - f)) \leq \left(1 - \frac{1}{k}\right) \log W(r).$$

És fàcil de demostrar per la teoria de les famílies normals que A_k és un conjunt clos. En efecte: sigui $F \in S_{w,t}$ un punt d'acumulació de A_k . Això és equi-

valent, segons la preposició 2.^o del número 3.1, a l'existència per a tot valor de n d'una funció $F_n \in S_{w,t}$ tal que

$$(3.4.3) \quad M(n, F_n - F) < \frac{1}{n}$$

i d'una funció entera f_n que verifica, per a $r > k$,

$$(3.4.4) \quad \log_2 M(r, f_n) \leq \left(1 - \frac{1}{k}\right) \log W(r)$$

$$(3.4.5) \quad \log n(r, 1/(F_n - f_n)) \leq \left(1 - \frac{1}{k}\right) \log W(r).$$

Evidentment, la família $\{f_n\}$ és una família normal en qualsevol domini afitat, i, per tant, podrem extreure'n una successió parcial uniformement convergent vers una funció f que complirà (3.4.1), ja que les $\{f_n\}$ verifiquen (3.4.4). Aquesta successió parcial, la representarem per $\{f_{n_m}\}$.

D'altra banda, segons (3.4.3), la successió $\{F_n\}$ tendeix vers F uniformement en tot domini afitat, i a fortiori la successió $\{F_{n_m}\}$ (que correspon a la $\{f_{n_m}\}$) serà també uniformement convergent vers F en tot domini afitat.

Per consegüent, la successió $\{F_{n_m} - f_{n_m}\}$ convergirà uniformement en tot domini afitat vers $F - f$, i de (3.4.5) seguirà (3.4.2), o sigui que hem demostrat que A_k és clos.

Ara: si

$$F(z) = \sum a_n z^n$$

és una funció qualsevol que pertany a $S_{w,t}$, demostrarem ara que en tot entorn

$$(3.4.6) \quad \{\Phi \mid M(R, \Phi - F) < \varepsilon, \Phi \in S_{w,t}\}$$

existirà almenys una funció $\Phi_0 \in B_{w,t}$. Sigui n^* un nombre tal que

$$(3.4.7) \quad \sum_{n=n^*}^{\infty} |a_n| R^n < \frac{\varepsilon}{2}$$

Aleshores, com que és evident que en el teorema I la successió $\{n_k\}$ que intervé en el seu enunciat pot ésser determinada de manera que $n_k > n^*$, o bé $F \in B_{w,t}$, o bé serà la

$$\Phi_1(z) = \sum \varepsilon_n a_n z^n$$

que satisfarà $\Phi_1 \in B_{w,t}$ segons el teorema I. Però la (3.4.7) ens permet d'afirmar que

$$M(R, \Phi_1 - F) < \varepsilon$$

o sigui que en l'entorn (3.4.6) hi ha almenys una funció pertanyent a $B_{w,t}$. Això demostra que $B_{w,t}$ és un conjunt dens.

Per altra banda, com que els A_h són closos i compresos en el complement de $B_{w,t}$, els A_h són no densos. A més, ja que és gairebé evident per definició que

$$A_{w,t} = \bigcup_{h \geq 1} A_h$$

resulta que $A_{w,t}$ és un F_σ de primera categoria, i, per tant, tenint en compte que $S_{w,t}$ és de segona categoria, podem afirmar que $B_{w,t}$ és un G_δ de segona categoria; i com que hem vist que és dens, queden finalment demostrades totes les afirmacions del teorema IV.

El teorema IV mostra que les funcions que tenen el valor excepcional permès pel teorema de Picard, o per les seves generalitzacions, són elles mateixes excepcionals en $S_{w,t}$ en el sentit topològic, tal com hem indicat en la introducció.

3.5. — La definició de les direccions de Borel-Valiron per a les funcions d'ordre finit és ja clàssica. Per a les funcions d'ordre infinit, K.L. Hiong [1] dóna també una definició de les direccions de Borel-Valiron, però no seguirem la definició d'aquest últim autor.

Nosaltres definirem les direccions de Borel-Valiron d'una funció $F(z)$ entera i d'ordre infinit de la manera següent: Sigui $W(r)$ com sempre la funció que, junt amb $F(z)$, verifica les condicions (I), (II), (III), (IV) i (V). Representem per $n(r, \theta, \epsilon, F)$ el nombre zercs de $F(z)$ interiors a

$$(3.5.1) \quad |z| < r \quad | \arg z - \theta | < \epsilon$$

Aleshores, si la funció $F \in S_{w,t}$ i verifica

$$(3.5.2) \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\log n(r, \theta, \epsilon, F-a)}{\log W(r)} = 1$$

per qualsevol valor de $\epsilon > 0$ i qualsevol valor finit de a , amb una sola excepció possible, la direcció $\arg z = \theta$ serà dita una direcció de Borel-Valiron de $F(z)$. Si la (3.5.2) és satisfeta per tot valor finit de a direm que la direcció $\arg z = \theta$ és una direcció de Borel-Valiron de $F(z)$ sense valor excepcional.

Direm que $F \in C$ si, i solament si, $F \in S_{w,t}$ i per F existeix almenys una direcció que no és de Borel-Valiron sense valor excepcional. Representarem per D el complement de C en relació a $S_{w,t}$, és a dir, D és el conjunt format per les funcions $F \in S_{w,t}$ per a les quals totes les direccions són direccions de Borel-Valiron sense valor excepcional.

Establertes aquestes definicions, demostrarem el:

TEOREMA V. — *El conjunt C és un F_σ de primera categoria i D és un G_δ dens de segona categoria.*

Demostració. — Sigui θ un valor donat qualsevol i $C_k(\theta)$ el conjunt de les funcions $F \in S_{w,t}$ que per $r > k$ i per un valor de $|a| \leq k$, verifica

$$\log n(r, \theta, 1/k, F-a) \leq \left(1 - \frac{1}{k}\right) \log W(r)$$

D'una manera semblant a la que hem utilitzat en el número 3.4, podem demostrar també que $C_k(\theta)$ és clos.

D'altra banda, sigui $\{\lambda_n\}$ una successió creixent de nombres naturals que verifica les condicions llacunars necessàries per a la validesa d'un resultat que vaig demostrar en una Memòria anterior [6, teorema 4.2]. Aquest resultat era sobre sèries de Dirichlet, però és evident que quan els λ_n són nombres naturals es pot aplicar a sèries de Taylor amb la transformació corresponent. Sigui ara

$$F_1(z) = \sum a_n z^n$$

una funció entera qualsevol però tal que $F_1 \in S_{w,t}$. Aleshores demostrarem que en tot entorn

$$(3.5.3) \quad \{F \mid M(R, F - F_1) < \varepsilon, F \in S_{w,t}\}$$

existeix una funció $F_2 \in D$. En efecte: és fàcil de veure que és possible de determinar un valor n_0 tal que

$$\sum_{n=n_0+1}^{\infty} |a_n| R^n < \varepsilon$$

i si posem

$$F_2(z) = \sum_0^{n_0} a_n z^n + \sum_m^{\infty} a_{\lambda_n} z^{\lambda_n}$$

on $\lambda_m > n_0$, tindrem

$$M(R, F_2 - F_1) < \varepsilon$$

i, per tant, F_2 serà una funció pertanyent a (3.5.3).

Ara: ja que els λ_n satisfan les condicions del resultat citat [6, teorema 4.2] d'aquest segueix $F_2 \in D$. Això demostra que D és dens, i com que $C_k(\theta)$ pertany al complement de D , resulta que $C_k(\theta)$ és un conjunt clos no dens. Per consegüent,

$$C(\theta) = \bigcup_{k \geq 1} C_k(\theta)$$

és un F_σ de primera categoria.

Considerem ara una successió $\{\theta_n\}$ de valors de θ densa en l'interval $0 < \theta < 2\pi$. Llavors, evidentment,

$$C = \bigcup_{n \geq 1} C(\theta_n)$$

i, per tant, C serà també un F_σ de primera categoria, i D serà un G_δ de segona categoria. Com que ja hem demostrat que D era un conjunt dens, el teorema V queda totalment demostrat.

3.6. — Habitualment $F(p)(z)$ representa, respectivament, un integral, la funció mateixa o una derivada segons que p sigui un enter negatiu, nul o positiu. Seguirem aquest costum.

Per altra banda, si p és negatiu, tindrem

$$F(p)(z) = \sum_p^{-1} a_n z^n + \sum_0^{\infty} \frac{n!}{(n-p)!} a_n z^{n-p}$$

on les a_n per $p \leq n \leq -1$ no vénen determinades per F .

Signi D^* el conjunt de les funcions $F \in S_{w,t}$ tals que qualsevol que sigui p i en cas d'ésser negatiu qualsevol que siguin a_n per $p \leq n \leq -1$, la funció $F(p)(z)$ tingui totes les direccions com a direccions de Borel-Valiron sense valor excepcional. Així mateix representarem per C^* el complement de D^* en relació a $S_{w,t}$.

Amb aquestes notacions podem demostrar:

TEOREMA VI. — C^* és un F_σ de primera categoria i D^* és un G_δ dens de segona categoria.

Demostració. — Igual que en el número anterior, podem demostrar que D^* és dens.

D'altra banda, representem per $C_k^*(\theta)$ el conjunt de les funcions que almenys per un valor de p tal que $|p| \leq k$, i si p és negatiu per una integral tal que

$$|a_n| \leq k \quad \text{per} \quad p \leq n \leq -1$$

existeix un valor a que verifica $|a| \leq k$ i que per a $r > k$

$$\log n(r, \theta, 1/k, F(p) - a) \leq (1 - \frac{1}{k}) \log W(r)$$

Aleshores és fàcil de demostrar que $C_k^*(\theta)$ és un conjunt clos, i com que pertany al complement de D^* , resulta que $C_k^*(\theta)$ és no dens, d'aquí se segueix que

$$C^*(\theta) = \bigcup_{k \geq 1} C_k^*(\theta)$$

és un F_σ de primera categoria. I com que si prenem, com en el número anterior una successió $\{\theta_n\}$ densa en l'interval $0 \leq \theta \leq 2\pi$, és evident que

$$C = \bigcup_{n \geq 1} C(\theta_n);$$

haurem demostrat el teorema.

3.7. — R e m a r c a . — El teorema V enclou una part del teorema IV, però no la totalitat. De la mateixa manera el teorema VI enclou una part del V.

N O T A

A continuació donarem un resultat que no té relació amb el tema d'aquesta Memòria; això no obstant, com que la seva demostració és semblant a la dels teoremes IV, V i VI, creiem adequat d'incloure'l en aquesta nota

Sigui

$$f(z) = \sum_0^{\infty} b_n z^n$$

una sèrie convergent en el cercle $|z| < 1$. Si

$$\overline{\lim}_{r \rightarrow 1} \frac{\log_2 M(r, f)}{-\log (1-r)} > 1$$

existeix una funció $V(r)$ tal que

$$\overline{\lim}_{r \rightarrow 1} \frac{\log_2 M(r, f)}{\log V(r)} = 1$$

i, a més, tal que, si escrivim

$$V_1(1/(1-r)) = V(r)$$

la funció $V_1(r)$ tindrà propietats semblants a la $W(r)$ del número 1.1.

Per tant, donada una funció $V(r)$ amb les propietats tot just indicades i una altra funció contínua $t(r)$ tal que $t(r) > 0$ i $t(r) \rightarrow 0$ quan $r \rightarrow 1$, nosaltres podrem considerar l'espai $E_{v,t}$ format per totes les funcions $f(z) = \sum b_n z^n$ holomorfes per a $|z| < 1$ i tals que

$$\overline{\lim}_{r \rightarrow 1} \frac{\log_2 M(r, f)}{\log V(r)} = 1$$

i

$$\log_2 (\sum |b_n| r^n) < (1 + t(r)) \log V(r)$$

A més, jo suposo que la topologia de $E_{v,t}$ és la topologia de la convergència uniforme sobre conjunts compactes de $|z| < 1$.

Ara es pot demostrar:

TEOREMA VII. — $E_{v,t}$ és de segona categoria.

No donarem la demostració, puix que és semblant a la del teorema III.

Si H representa el conjunt de les funcions $f \in E_{v,t}$ que poden ésser prolongades analíticament a l'exterior de $|z| < 1$ i K el complement de H en relació a $E_{v,t}$ podrem enunciar i demostrar el teorema següent:

TEOREMA VIII. — $H \subset \Delta$, on Δ és un F_σ de primera categoria, i $K \supset \Lambda$, on Λ és un G_δ dens de segona categoria.

Demostració. — Representem per $M(r, \theta, \epsilon, f)$ el màxim de $|f(z)|$ per a z pertanyent al domini

$$|z| < r, \quad |\arg z - \theta| \leq \epsilon$$

i sigui Λ el conjunt format per les funcions de $E_{v,t}$ que satisfan per a qualsevol θ i ϵ

$$\lim_{r \rightarrow 1} M(r, \theta, \epsilon, f) = \infty$$

Per mitjà d'un resultat que no he publicat encara [8] es pot demostrar que Λ és dens.

D'altra banda, si $\Delta_k(\theta)$ representa el subconjunt format per les funcions $f \in E_{v,t}$ tals que

$$M(r, \theta, 1/k, f) \leq k \quad \text{per a} \quad 1 > r > 1 - \frac{1}{k}.$$

Per un procediment semblant al que hem utilitzat repetides vegades, resulta que $\Delta_k(\theta)$ és un conjunt clos, i ja que $\Delta_k(\theta)$ pertany al complement de Λ , tindrem que $\Delta_k(\theta)$ és no dens. Per tant,

$$\Delta(\theta) = \bigcup_{k \geq 1} \Delta_k(\theta)$$

serà un F_σ de primera categoria qualsevol que sigui el valor de θ .

Prenguem ara una successió $\{\theta_n\}$ densa en l'interval $0 \leq \theta \leq 2\pi$; aleshores el conjunt

$$\Delta = \bigcup_{n \geq 1} \Delta(\theta_n)$$

serà també un F_σ de primera categoria.

Ara: és fàcil de veure que Δ és el complement de Λ en relació a $E_{v,t}$, i, per tant, que Λ és un G_δ .

Per altra banda, la relació $H \subset \Delta$ és gairebé evident, i d'ella resulta immediatament que $K \supset \Lambda$. I això acaba la demostració del teorema.

BIBLIOGRAFIA

1. HIONG, K.L.: *Sur les fonctions entières et les fonctions méromorphes d'ordre infini* («Jour. Math.», 9^e série, t. 14, 1935, p. 223).
2. LITTLEWOOD, J.E. and OFFORD, A.C.: *On the distribution of zeros and α -values of a random integral function (II)* («Annals Math.», vol. 49, 1948, p. 885).
3. POLYA, G.: *Untersuchungen über Lücken und Singularität von Potenzreihen* («Math. Zeitschrift», t. 29, 1929, p. 549).
4. SUNYER BALAGUER, F.: *Sobre la substitución de una función excepcional por una propiedad lagunar* («Memorias R. Acad. Cienc. Art. de Barcelona», III^a. época, vol. 29, 1948, p. 475).
5. SUNYER BALAGUER, F.: *Propiedades de las funciones enteras representadas por series de Taylor lagunares (Orden finito)* («Collectanea Math.», vol. 2, 1950, p. 129).
6. SUNYER BALAGUER, F.: *Sobre la distribución de los valores de una función entera representada por una serie de Dirichlet lagunar* («Rev. Acad. de Ciencias de Zaragoza», serie 2^a, t. 5, 1950, p. 25).
7. SUNYER BALAGUER, F.: *Sur la substitution d'une valeur exceptionnelle par une propriété lacunaire* («Acta Math.», t. 87, 1952, p. 17).
8. SUNYER BALAGUER, F.: *Sobre la distribución de los valores de una función representada por una serie de Dirichlet lagunar* (Tesi doctoral, de próxima aparición).
9. VALIRON, G.: *Les théorèmes généraux de M. Borel dans la théorie des fonctions entières* («Ann. Scienc. de l'Ec. Norm. Sup.», t. 37, 1920, p. 219).

TAULA

	<u>Pàgines</u>
Advertiment	5
Introducció	7
I.	9
II.	19
III.	25
Nota	35
Bibliografia	37

ACABAT D'IMPRIMIR A LA IMPREMTA-ESCOLA DE
LA CASA DE CARITAT, DE BARCELONA, EL DIA 28
DE FEBRER DE L'ANY 1967.

